***ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ*: ΕΥΡΕΣΗ ΛΥΣΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ Β ΒΑΘΜΟΥ**

ΤΜΗΜΑ Α1

***ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΤΩΝ*:   ΑΓΓΕΛΑΚΗΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ-**

ΒΑΦΕΙΔΗΣ ΠΙΕΤΡΟ- ΖΙΩΓΑΣ ΘΟΔΩΡΗΣ

Η λύση πολλών προβλημάτων της Γεωμετρίας, της Φυσικής καθώς και άλλων επιστημών ανάγεται στην επίλυση μιας εξίσωσης της μορφής:

$ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$ (1)

η οποία λέγεται εξίσωση δευτέρου βαθμού.

Για παράδειγμα, έστω ο τύπος , όπου S το διάστημα που διανύει κινητό σε χρόνο t, με αρχική ταχύτητα v_o και επιτάχυνση γ. Αν θεωρήσουμε ως άγνωστο τον χρόνο t, τότε προκύπτει η εξίσωση: $S=v_o+\gamma t$ η οποία είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού.

Μέθοδος της «συμπλήρωσης του τετραγώνου».

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 &\Leftrightarrow x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \qquad [\text{αφού } \alpha\neq 0\,]\\
&\Leftrightarrow x^2+\frac{\beta}{\alpha}x=-\frac{\gamma}{\alpha}\\
&\Leftrightarrow x^2+2x\cdot\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{\gamma}{\alpha}\\
&\Leftrightarrow x^2+2x\cdot\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}=-\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\beta}{4\alpha^2}\\
&\Leftrightarrow \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}
\end{aligned}$$

Αν θέσουμε Δ = β2 – 4αγ, τότε η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2} \qquad (2)$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- Αν **$\Delta > 0$**, τότε έχουμε:

$$x+\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad ή \quad x+\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

δηλαδή

$$x=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad ή \quad x=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Επομένως η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), έχει δύο λύσεις άνισες τις:

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Για συντομία οι λύσεις αυτές γράφονται

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Μέθοδος των Ινδών

Η επίλυση αυτή που επινοήθηκε στην Ινδία, αποδίδεται στον Sridhara (1025 μ. Χ. περίπου).

Έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$$
$$\alpha x^2+\beta x=-\gamma$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με 4α και ύστερα προσθέτουμε το

β^2 και στα δύο μέλη, για να προκύψει ένα «τέλειο» τετράγωνο στο αριστερό μέλος.

Δηλαδή

$$4\alpha^2x^2 + 4\alpha\beta x = -4\alpha\gamma$$
$$4\alpha^2x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$
$$(2\alpha x + \beta)^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$
$$2\alpha x + \beta = \pm\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}, \quad \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$$

Έτσι προκύπτει ότι:

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Μέθοδος του Vieta

Η εξίσωση 2ου βαθμού

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$$

μπορεί να λυθεί ευκολότερα, αν δεν περιέχει τον πρωτοβάθμιο όρο βx, πράγμα που μπορεί εύκολα να επιτευχθεί με την αντικατάσταση

$$x = y - \frac{\beta}{\alpha}, (1)$$

Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$\alpha\left(y - \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \beta\left(y - \frac{\beta}{2\alpha}\right) + \gamma = 0$$

η οποία όταν απλοποιηθεί γίνεται:

$$\alpha y^2 + \frac{-\beta + 4\alpha\gamma}{4\alpha} = 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι

$$y = \frac{\pm\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

εφόσον

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$$

Για να βρούμε τις ρίζες της αρχικής εξίσωσης αντικαθιστούμε την παραπάνω τιμή του y στην (1) και έχουμε:

$$x = y - \frac{\beta}{2\alpha} = \pm\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} - \frac{\beta}{2\alpha}$$

οπότε

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Μέθοδος του Harriot

Ο μαθηματικός Thomas Harriot (1560-1621) εφάρμοσε τη μέθοδο της παραγοντοποίησης, για να βρει τις λύσεις μιας εξίσωσης 2ου βαθμού, στο μεγάλο έργο του για την άλγεβρα «Artis Analytical Praxis». Η τεχνική του είναι η εξής περίπου:

Υποθέτουμε ότι x1 και x2 είναι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0 \quad (1).$$

Σχηματίζουμε τώρα μία εξίσωση με ρίζες x1 και x2.

Αυτή είναι η (x - x1)(x - x2) = 0 ή ,ισοδύναμα, η

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$ (2)

Με διαίρεση των μελών της (1) με $\alpha \neq 0$

βρίσκουμε: $$x^2 + \frac{\beta}{2\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0, (3)$$

Επειδή οι εξισώσεις (2) και (3) είναι ίδιες, οι αντίστοιχοι συντελεστές πρέπει να είναι ίσοι. Επομένως:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$$

και

$$x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \quad (4)$$

Η ταυτότητα $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$ σε συνδυασμό με την (4) δίνει

$$x_1 - x_2 = \pm\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{\alpha}$$

εφόσον

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0 \quad (5)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (4) και (5) έχουμε:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

και

$$x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$